INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES ATTACHES

et

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE (Elèves Cadre de Gestion Statistique)

JUIN 1991

SECONDE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

OPTION A (MATHEMATIQUES)

(Durée : 4 heures)

Chacune des trois parties peut être traitée indépendamment des autres.

NOTATIONS

$\mathbb{R}$ désignant l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs, $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls.

Si U, V et W sont des sous-ensembles de réels, les produits cartésiens $U \times V$ et $U \times V \times W$ désignent respectivement les ensembles de couples (u,v) et de triplets (u,v,w) de réels où u est dans U, v est dans V et w dans W.

e est la base du logarithme népérien, lui-même désigné par ℓn.

I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on note $C_n(I)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont les éléments sont les fonctions définies sur I, à valeurs réelles et admettant sur I des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. On notera aussi $C_n(\mathbb{R}^*)$ l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

PARTIE I

I.1.a) A toute fonction $y : x \longrightarrow y(x)$ de $C_2(\mathbb{R}_+^*)$ on associe la fonction Y définie sur $\mathbb{R}$ par $Y : t \longrightarrow Y(t) = y(e^t)$. Montrer qu'on définit ainsi une bijection $T : y \longrightarrow Ty = Y$ de $C_2(\mathbb{R}_+^*)$ dans $C_2(\mathbb{R})$.

b) a et b étant deux constantes réelles, démontrer que $y : x \longrightarrow y(x)$ élément de $C_2(\mathbb{R}_+^*)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$E(a,b) : \quad x^2y'' + axy' + by = 0 ,$$

si, et seulement si, la fonction $Y = Ty$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle H(a,b) du second ordre, linéaire et à coefficients constants que l'on déterminera.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

I.2.a) Selon le couple (a,b) , donner deux éléments de $C_2(R)$ linéairement indépendants qui soient solution sur $\mathbb{R}$ de H(a,b) , on simplifiera l'écriture de ces solutions en posant :

$$\alpha = \frac{1 - a}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\sqrt{|\, 4b - (a-1)^2 \,|}}{2} .$$

b) En déduire, pour tout couple (a,b) , une base d'un sous-espace vectoriel $V_+^*(a,b)$ de $C_2(\mathbb{R}_+^*)$ dont les éléments sont solutions de E(a,b) sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) A toute fonction y de $V_+^*(a,b)$ on associe la fonction $\hat{y}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, paire et dont la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est y. Calculer pour $x < 0$ l'expression :

$$x^2\hat{y}''(x) + ax\hat{y}'(x) + b\hat{y}(x)$$

et en déduire, pour chaque couple (a,b), un sous-espace vectoriel $V^*(a,b)$ de $C_2(\mathbb{R}^*)$ dont tout élément soit solution de E(a,b).

I.3. Soit $r : x \longrightarrow r(x)$ une fonction de $C_2(\mathbb{R}_+^*)$, non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution de E(a,b) sur $\mathbb{R}_+^*$. On désigne par S_r l'ensemble des fonctions s de $C_2(\mathbb{R}_+^*)$ telles que la fonction :

$$y : x \longrightarrow y(x) = r(x).s(x)$$

soit solution de E(a,b) sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Vérifier que S_r ne se réduit pas à la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Démontrer que toute fonction s de S_r est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle à variables séparables $E_s(a,b)$ que l'on écrira.

c) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}_+^*$ dans lequel r(x) ne s'annule pas et x_0 un réel de I. Exprimer sous la forme d'une intégrale une solution de $E_s(a,b)$ sur I qui s'annule pour $x = x_0$. En déduire l'ensemble des solutions de $E_s(a,b)$ sur I.

d) Vérifier que la fonction r définie par

$$r : x \longrightarrow r(x) = x^{-2}\cos(\ell n x)$$

est solution de E(5,5) sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire est élément de $V_+^*(5,5)$.

Déterminer l'ensemble des solutions de $E_s(5,5)$ sur chacun des intervalles ouverts de $\mathbb{R}_+^*$ où $r(x) \neq 0$; peut-on retrouver ainsi tous les éléments de $V_+^*(5,5)$?

A SUIVRE

PARTIE II

Si y_1 et y_2 sont des fonctions de $C_2(I)$ où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, on désigne par D(x) le déterminant :

$$D(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

II.1. y_1 et y_2 sont des fonctions de l'espace vectoriel réel noté $C_2(\mathbb{R}^*)$, des fonctions 2 fois continument dérivables sur $\mathbb{R}^*$ telles que pour tout x de $\mathbb{R}^*$

$$D(x) \neq 0 .$$

a) Démontrer que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes dans $C_2(\mathbb{R}^*)$.

b) Démontrer que, pour toute fonction y du sous-espace vectoriel $V_{y_1,y_2}(\mathbb{R}^*)$ de $C_2(\mathbb{R}^*)$ engendré par y_1 et y_2, le déterminant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & y'(x) & y''(x) \\ y_1(x) & y_1'(x) & y_1''(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = 0$$

pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

c) (α,β) étant un couple de réels donné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, vérifier que les fonctions ℓ_1 et ℓ_2 définies sur $\mathbb{R}^*$ respectivement par :

$$\ell_1 : x \longrightarrow \ell_1(x) = |x|^\alpha \cos(\beta \ell n|x|) ,$$

$$\ell_2 : x \longrightarrow \ell_2(x) = |x|^\alpha \sin(\beta \ell n|x|) ,$$

sont des fonctions de $C_2(\mathbb{R}^*)$ et sont linéairement indépendantes dans $C_2(\mathbb{R}^*)$. Déterminer une équation différentielle $L(\alpha,\beta)$ du second ordre, linéaire et admettant pour solution sur $\mathbb{R}^*$ les fonctions ℓ dû sous-espace vectoriel $V_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^*)$ de $C_2(\mathbb{R}^*)$ engendré par ℓ_1 et ℓ_2.

II.2. J est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 et (a,b) est un couple de réels donné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit l'équation différentielle

$$E(a,b) : \qquad x^2y'' + axy' + by = 0$$

Soit y_1 et y_2 deux fonctions solutions de E(a,b) sur J et linéairement indépendantes dans le sous-espace vectoriel $V_{a,b}(J)$ de $C_2(J)$ des solutions sur J de E(a,b).

Tournez la page S.V.P.

Exprimer le déterminant $D(x)$ en fonction de sa dérivée $D'(x)$ par rapport à x et en déduire que $D(x) \neq 0$ pour tout x de J.

II.3.a) K_0 étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ centré en 0, soit y_1 une fonction de $C_1(K_0)$ telle que $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 0$ et y_2 la fonction définie sur K_0 par :

$$y_2(x) = y_1(x) \text{ pour } x \in (K_0 \cap \mathbb{R}_+) ,$$

$$y_2(x) = - y_1(x) \text{ pour } x \in (K_0 \cap \mathbb{R}_-) .$$

Vérifier que y_2 est élément de $C_1(K_0)$ et calculer leur déterminant $D(x)$ pour tout x de K_0.

Les fonctions y_1 et y_2 sont-elles nécessairement linéairement dépendantes sur K_0 ? Qu'en est-il de leur restriction à $(K_0 \cap \mathbb{R}_+)$? à $(K_0 \cap \mathbb{R}_-)$?

b) Plus généralement, soit K un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et deux fonctions y_1 et y_2, éléments de $C_1(K)$, différentes de la fonction nulle et linéairement dépendantes. Calculer leur déterminant $D(x)$ pour tout x de K.

c) Réciproquement, soit deux fonctions y_1 et y_2 de $C_1(K)$, différentes de la fonction nulle et telles que pour tout x de K on ait $D(x) = 0$. Sont-elles nécessairement linéairement dépendantes ?

Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert non vide $\hat{K}$ inclus dans K tel que, pour tout x de $\hat{K}$, on ait $y_1(x) \neq 0$ et que les restrictions à $\hat{K}$ de y_1 et y_2 soient linéairement dépendantes.

d) Formuler une conclusion relative à $D(x)$ tirée de l'étude qui précède.

PARTIE III

III.1. (α,β,γ) étant un triplet de réels donné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on considère les fonctions Z et z définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$Z : t \longrightarrow Z(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma) ,$$

$$z : x \longrightarrow z(x) = x^{\alpha} \cos(\beta \ell n x + \gamma) .$$

a) Déterminer l'ensemble H des réels $h > 0$ tels que pour tout t de $\mathbb{R}$ on ait :

$$Z(t+h) = e^{\alpha h} Z(t) .$$

Montrer que H a un plus petit élément que l'on précisera.

A SUIVRE

b) Déterminer alors les couples de réels (λ,μ) tels que, pour chacun de ces couples, on ait pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$:

$$z(\lambda x) = \mu z(x) \ .$$

III.2. (θ,h,k) étant un triplet de réels donné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on se donne une fonction quelconque G définie sur $[\theta,\theta+h[$:

$$G : t \longrightarrow G(t) \ .$$

a) Déterminer une fonction F définie sur $\mathbb{R}$, admettant G comme restriction à $[\theta,\theta+h[$ et vérifiant pour tout t de $\mathbb{R}$ la relation :

$$F(t+h) = kF(t) \ ;$$

pour cela on cherchera à expliciter les valeurs F(t) de F pour tout t de $\mathbb{R}$ en fonction des valeurs de G.

b) Dans le cas où G est bornée, discuter, selon la valeur de k et le signe de G, le comportement de F(t) lorsque t tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

III.3. (λ,μ) étant un couple donné de $]1,+\infty[\times]1,+\infty[$, on considère les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles et vérifiant pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ la relation :

$$f(\lambda x) = \mu f(x) \ .$$

a) On donne u de $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer le plus petit intervalle $[u,v[$ tel que la restriction g de f à $[u,v[$ permette de définir de façon unique f sur tout $\mathbb{R}_+^*$ en explicitant les valeurs f(x) de f pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ en fonction des valeurs de g sur $[u,v[$.

b) Quelles conditions nécessaires et suffisantes g doit-elle satisfaire pour que f soit : continue sur $\mathbb{R}_+^*$? dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?

c) Prolonger f par continuité en 0. Existe-t-il des couples (λ,μ) tels que $\lambda \neq \mu$ pour lesquels f, ainsi prolongée, aurait une dérivée à droite en 0 ? Dans le cas où $\lambda = \mu$, montrer que, si une telle dérivée existe, alors elle détermine f sur tout $\mathbb{R}_+^*$.

FIN